RCult
LA REPUBBLICA
DOMENICA 1 FEBBRAIO 2015

LA MOSTRA
"Ghosthouse": le opere di Lawrence Carroll al Mambo di Bologna fino al 6 aprile
(pag. 54)

Matematica come narrazione

MARCUS DU SAUTOY

Dopo il grande Fermat, la sfida per generazioni di studiosi è stata quella di trovare un sentiero che portasse da un territorio conosciuto a una terra nuova e misteriosa. Come la storia delle avventure di Frodo nel "Signore degli anelli". Affermare la fondatezza di una tesi è una descrizione del viaggio dalla Contea a Mordor

La buona dimostrazione di un teorema ha molto in comune con la migliore letteratura. E chi assiste a essa proverà la stessa sensazione dell'autore È come la soluzione armonica di un brano musicale. O la rivelazione del colpevole in un giallo

I MATEMATICI sono cantastorie. I nostri personaggi sono i numeri e le geometrie. Le nostre storie sono le dimostrazioni che creiamo intorno a questi personaggi. Molte persone pensano che fare matematica consista nel documentare tutte le affermazioni esatte su numeri e geometria: l'irrazionalità della radice quadra di due, la formula per trovare il volume della sfera, un elenco dei gruppi semplici finiti. Secondo uno dei miei eroi matematici, Henri Poincaré, fare matematica è qualcosa di ben diverso: «Creare consiste precisamente nel non realizzare combinazioni inutili. La creazione è discernimento, scelta. [...] Le combinazioni sterili non si affacciano nemmeno nella mente del creatore».

La matematica, proprio come la letteratura, consiste nel fare scelte. E allora, quali sono i criteri di uno degli articoli di matematica inclusi nelle riviste di settore che affollano la nostra biblioteca matematica? Perché l'ultimo teorema di Fermat è considerato come una delle grandi opere matematiche del secolo scorso, mentre un altro calcolo numerico altrettanto complicato è considerato banale e privo di interesse? Dopo tutto, che cosa c'è di così interessante nel sapere che un'equazione come $x^n+y^n=z^n$ non ha nessuna soluzione intera quando $n>2$.

Secondo me, è la natura della dimostrazione del teorema di Fermat che innalza questa affermazione esatta sui numeri al rango di qualcosa che merita un posto nel pantheon della matematica. E le caratteristiche di una buona dimostrazione matematica hanno molto in comune con la migliore narrativa.

La mia congettura, se dovessi trasformarla in un'equazione matematica, è che: dimostrazione = narrazione

Una dimostrazione è come il libro di viaggio del matematico. Fermat ha scrutato fuori dalla sua finestra matematica e ha visto in lontananza questa vetta matematica, l'affermazione che le sue equazioni non hanno soluzioni intere. La sfida per le generazioni di matematici successivi è stata trovare un sentiero che portasse dal territorio conosciuto, già esplorato dai matematici, a questa terra nuova e misteriosa. Come la storia delle avventure di Frodo nel *Signore degli anelli*, una dimostrazione è una descrizione del viaggio dalla Contea a Mordor.

All'interno dei confini della Contea, della terra conosciuta, ci sono gli assiomi della matematica, le verità conclamate sui numeri, insieme a quei teoremi che sono già stati dimostrati. È questo il contesto da cui dare inizio alla ricerca. Il viaggio che parte da questo territorio noto è vincolato dalle regole della deduzione matematica, come le mosse consentite per un pezzo degli scacchi, che stabiliscono i passi che si è autorizzati a fare attraverso questo mondo. Certe volte si finisce in quella che sembra un'impasse e bisogna fare quel tipico passo laterale, spostandosi di fianco o magari anche all'indietro per trovare un modo per girarci intorno. A volte bisogna aspettare che vengano creati nuovi personaggi matematici, come i numeri immaginari o il calcolo, per poter continuare il viaggio.

La dimostrazione è la storia del tragitto e la mappa che segna le coordinate del viaggio: il giornale di bordo del matematico.

Una dimostrazione riuscita è come una serie di cartelli stradali che consentono a tutti i matematici successivi di fare lo stesso viaggio. I lettori della dimostrazione proveranno la stessa, eccitante sensazione dell'autore nello scoprire che quel sentiero consente di arrivare a quella vetta lontana. Nella maggior parte dei casi una dimostrazione non cercherà di mettere tutti i puntini sulle I e tutte le stanghette sulle T, proprio come una storia non presenta ogni dettaglio della vita di un personaggio. È una descrizione del viaggio, e non necessariamente la ricostruzione di ogni singolo passo. Le argomentazioni che i matematici forniscono come elementi di prova sono pensate per accendere la fantasia del lettore. Il matematico Godfrey Harold Hardy le descrisse così: «Sciocchezze, ghirigori retorici pensati per influenzare la psicologia, immagini sulla lavagna durante la lezione, congegni per stimolare l'immaginazione degli allievi».

La gioia di leggere e creare matematica viene da quell'entusiasmante momento di rivelazione che proviamo quando tutti i tasselli sembrano andare al loro posto risolvendo il mistero matematico. È come il momento della soluzione armonica in un pezzo musicale o la rivelazione del colpevole in un romanzo giallo.

L'elemento sorpresa è una qualità chiave di una dimostrazione matematica accattivante. Sentite cosa dice il matematico Michael Atiyah a proposito delle caratteristiche della matematica che piace a lui: «Mi piace rimanere sorpreso. L'argomentazione che segue un percorso codificato, con pochi elementi nuovi, è noiosa e insulsa. Mi piace l'elemento inaspettato, un punto di vista nuovo, un collegamento con altre aree, una pestata di piede».

Quando creo una nuova opera matematica le scelte che faccio sono motivate dal desiderio di portare per mano i miei lettori in un viaggio matematico interessante, pieno di curve, svolte e sorprese. Voglio stimolare il pubblico con la sfida di capire perché due personaggi matematici apparentemente scollegati abbiano qualcosa a che fare l'uno con l'altro. E poi, man mano che la dimostrazione prende corpo, ci si rende gradualmente conto, o si capisce all'improvviso, che queste due idee in realtà sono lo stesso identico personaggio.

Questa capacità di trovare collegamenti inaspettati è una delle ragioni per cui amo parlare di uno dei miei contributi al canone matematico. Alcuni anni fa scoprii un nuovo oggetto simmetrico, nei cui contorni si celavano le complessità di soluzioni delle curve ellittiche, uno dei grandi problemi irrisolti della matematica. La dimostrazione che ricamo durante un seminario o nell'articolo che ho scritto per una rivista di settore dimostra come fare per collegare queste due aree apparentemente diversissime del mondo matematico. Scoprire nuovi oggetti simmetrici non è difficile. Il mio computer potrebbe sfornare a getto continuo nuovi esempi di oggetti simmetrici mai presi in considerazione prima. L'arte del matematico sta nel selezionare quelli che raccontano una storia sorprendente. Come diceva Poincaré, è questo il ruolo del matematico: fare scelte.

Questo articolo è un estratto del discorso di Marcus du Sautoy per il lancio del programma Humanities and Science, diretto dal Centro di ricerca in scienze umanistiche dell'Università di Oxford il 20 gennaio. www.torch.ox.ac.uk. Traduzione di Fabio Galimberti

> TABELLINE

Quei modelli per rintracciare le rane naufraghe

PIERGIORGIO ODIFREDDI

VENTITRÉ anni fa, nel gennaio 1992, un cargo proveniente dalla Cina e diretto negli Stati Uniti si imbatté in una tempesta nel Pacifico e perse tre *container* con 28.000 animaletti di plastica: castori rossi, rane verdi, tartarughe blu e papere gialle. Gli animaletti andarono alla deriva in direzioni diverse: chi verso l'Alaska, chi verso l'Oceania e chi verso il Cile. I primi naufraghi furono avvistati sulle coste dell'Alaska in novembre, a 3.200 chilometri dal punto del naufragio, e nei mesi successivi ne furono trovati circa 400. La cosa allertò gli oceanografi, che misero alla prova i loro modelli matematici delle correnti e dei venti, cercando di prevedere dove e quando gli altri naufraghi sarebbero approdati. La previsione più interessante fu che alcune delle cosiddette Moby Duck (con un ovvio riferimento al capolavoro di Melville) si sarebbero infilate nello stretto di Bering e sarebbero riuscite ad approdare nell'Atlantico. Ci volle una decina d'anni, ma infine alcune effettivamente arrivarono sulla costa orientale degli Stati Uniti, e nel 2007 altre raggiunsero le spiagge dell'Irlanda e della Cornovaglia. L'Odissea degli animaletti di indistruttibile plastica non è ancora finita, nel miglior stile omerico. Forse un giorno qualcuna arriverà a Itaca?

ILLUSTRAZIONE DI OLIMPIA ZAGNOLI

L'ANALISI

I viaggi, gli scacchi Quante metafore parlano dei numeri

PIERGIORGIO ODIFREDDI

SPESSO l'attività del matematico viene spiegata, a coloro che la ritengono misteriosa, attraverso metafore attinte da altri campi. La prima di queste metafore è antica, e risale a Pitagora: dopo aver scoperto descrizioni numeriche degli intervalli musicali, egli coniò per le leggi matematiche del cosmo categorie musicali quali «l'armonia del mondo» e «la musica delle sfere», popolari ancor oggi. E Leibniz, molto dopo, capovolse la metafora, affermando nel 1712: «La musica è un esercizio inconscio di aritmetica da parte della mente che non sa di calcolare».

Una seconda metafora, più recente, tira in ballo gli scacchi. Che sono, effettivamente, un'attività parallela e analoga alla matematica. In entrambi i casi si parte da un punto iniziale ben prestabilito: gli assiomi, o le posizioni iniziali dei pezzi. Si procede imbrigliati da costrizioni ferree: le leggi della logica, o le regole del gioco. E si arriva a una fine ben definita: il teorema, o lo scacco matto.

> Per spiegare le leggi del cosmo Pitagora coniò l'espressione "armonia del mondo"

Purtroppo, per la maggior parte della gente la musica e gli scacchi sono attività non meno misteriose della matematica. Le due metafore lasciano dunque il tempo che trovano, e si limitano a illustrare un'incomprensione con un'altra. Prima o poi si finisce allora a un paragone con la letteratura, che va però preso con le molle. La maggior parte della narrativa è infatti fantastica, e inventa soggettivamente le proprie storie. La matematica racconta invece storie oggettive, e volendone trovare degli analoghi letterari bisogna rivolgersi al romanzo verista o al genere poliziesco.

O, più in generale, alla "letteratura deduttiva": sia quella alta dei racconti di Calvino e dei romanzi di Saramago, sia quella popolare della fantascienza. In questi generi si inventano mondi alternativi, costituenti altrettanti "sistemi assiomatici", che poi vengono analizzati al microscopio traendone le estreme conseguenze e mettendo la fantasia al servizio della deduzione, più che della libera invenzione.

Ma forse la metafora più comprensibile e istruttiva è quella del viaggio e del rispettivo *reportage*, perché permette di isolare due aspetti complementari dell'attività matematica: la costrizione deterministica fornita dal terreno sul quale ci si muove, e la libertà creativa necessaria per muoversi e andare da un punto all'altro. Naturalmente, a seconda della difficoltà e della profondità di ciò che si dimostra, il viaggio può andare dalla tranquilla passeggiata in pianura su un terreno conosciuto, all'impervia arrampicata su una montagna o una parete incognita.

Per fare un esempio concreto, prendiamo un teorema che tutti conosciamo: quello di Pitagora, secondo cui in un triangolo rettangolo i quadrati costruiti sui cateti equivalgono al quadrato costruito sull'ipotenusa. L'enunciato è il punto d'arrivo del viaggio, che però deve avere un punto d'inizio: ad esempio, il sistema di assiomi per la geometria euclidea. Che comprende, in particolare il famoso "postulato delle parallele", secondo cui c'è unica parallela a una retta che passa per un punto fuori di essa.

Individuati i due punti, di partenza e di arrivo, un percorso matematico che li congiunge si chiama dimostrazione. A volte, come nella vita, questo percorso è obbligato, e allora c'è sostanzialmente un'unica dimostrazione possibile del teorema a partire dagli assiomi. Ma nel caso del teorema di Pitagora, si possono seguire innumerevoli vie. Nei suoi *Elementi* Euclide ne mostra due, una basata su concetti elementari (i criteri di uguaglianza dei triangoli) e una su concetti sofisticati (la teoria della similitudine). La via elementare è pianeggiante, ma più lunga, mentre quella sofisticata è una scorciatoia, ma impervia.

Nell'Ottocento Elisha Loomis pubblicò un libro, intitolato *Il teorema di Pitagora*, che di dimostrazioni ne riportava 367! Ma l'interessante è che, una volta arrivati al teorema di Pitagora, si può tornare indietro: il percorso non è a senso unico, e ci sono vie che riportano al postulato delle parallele. Mentre se si scelgono altri punti di partenza, ad esempio la geometria non euclidea, non c'è modo di arrivare al teorema di Pitagora, per quanta creatività e invenzione si abbia. I letterati possono inventare ciò che vogliono, ma i matematici devono scoprire ciò che c'è.